Osnove statistike u demografiji

Predavanje 8

Testovi hipoteza o pretpostavljenoj vrijednosti parametra jedne populacije

- Statističke hipoteze su tvrdnje o jednom ili više parametara populacije. Mogu biti:
  - Jednostavne $H:\ \theta = 3$
  - Složene $H:\ \theta > 3$
- Prvi korak u provođenju testiranja hipoteza je definiranje hipoteza u skladu s predmetom istraživanja
- Nulta (H_0) i alternativna (H_1) hipoteza sadrže međusobno isključive tvrdnje o pretpostavljenoj vrijednosti parametra populacije
- Pravilo koje se koristi u donošenju odluke o odbacivanju ili neodbacivanju nulte hipoteze naziva se statistički test.
- Statistički se testovi dijele na
  - parametarske i
  - neparametarske.

Testovi hipoteza o pretpostavljenoj vrijednosti parametra jedne populacije

- Hipoteze parametarskog testa testiraju se tako da se uspoređuje vrijednost procijenjenog parametra, dobivena na temelju podataka iz uzorka, s pretpostavljenom vrijednosti tog parametra.
- Ako razlika između procijenjene i pretpostavljene vrijednosti parametra nije velika, smatra se slučajnom. Ako je ta razlika velika, ona je značajna ili signifikantna
- Kako bi se utvrdilo je li razlika velika koristi se testna veličina
- U postupku testiranja polazi se od pretpostavke da je hipoteza H_0 istinita

7.1. Vrste pogrešaka u postupku testiranja hipoteza

- Cilj je **odbaciti** lažnu i **ne odbaciti** istinitu nultu hipotezu

Tablica 7.1. Pogreška tipa I i pogreška tipa II

Odluka	H_0 je istinita	H_0 je lažna
Ne odbaciti H_0	Ispravna odluka	Pogreška tipa II
Odbaciti H_0	Pogreška tipa I	Ispravna odluka

- Vjerojatnost pogreške tipa I: razina signifikantnosti ili razina značajnosti testa $\alpha = P(H_0 \text{ se odbacuje} \mid H_0 \text{ istinita})$.
- Vjerojatnost pogreške tipa II ovisi o stvarnoj vrijednosti parametra populacije $\beta = P(H_0 \text{ se ne odbacuje} \mid H_0 \text{ lažna})$.
- Što je stvarna vrijednost parametra populacije bliža pretpostavljenoj vrijednosti, vjerojatnost pogreške tipa II je veća
- Smanjivanjem vjerojatnosti pogreške tipa I povećava se vjerojatnost pogreške tipa II i obratno

Vrste pogrešaka u postupku testiranja hipoteza

- U postupku testiranja se pogreška tipa I i pogreška tipa II ne mogu izbjeći, ali se može istovremeno smanjiti vjerojatnost obiju vrsta pogrešaka povećanjem veličine uzorka *n*
- Snaga testa je vjerojatnost odbacivanja H_0 kada je ona lažna

$$1 - \beta = P(H_0 \ \text{se odbacuje} \mid H_0 \ \text{lažna}).$$

- Grafički prikaz snage testa za različite vrijednosti odabranog parametra naziva se krivulja snage testa ili PC krivulja

Test hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti sredine populacije

- Dvosmjerni test
- Jednosmjerni test
    - Jednosmjerni test na donju granicu
    - Jednosmjerni test na gornju granicu

Dvosmjerni test

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

- Nulta hipoteza će se odbaciti za vrijednosti $\bar{X}$ koje se značajno razlikuju od μ_0.
- Kako bi se mogla donijeti odluka potrebno je definirati granice između područja odbacivanja H_0 i područja neodbacivanja H_0
- Kritične granice
- Za određivanje vrijednosti kritičnih granica potrebno je poznavati oblik sampling-distribucije standardiziranog procjenitelja $\bar{X}$

Sampling distribucija standardiziranog procjenitelja $\bar{X}$

- Jedinična normalna distribucija $N(0, 1)$, ako je jednostavni slučajni uzorak (bez obzira na njegovu veličinu n) izabran iz normalno distribuirane populacije s nepoznatom sredinom μ i poznatom varijancom σ^2
- Približno jedinična normalna distribucija $N(0, 1)$ ako je izabran velik uzorak ($n > 30$) iz populacije proizvoljnog oblika (centralni granični teorem)
- Pod pretpostavkom da je nulta hipoteza istinita $E(\bar{X}) = \mu = \mu_0$
- Standardizirana vrijednost procjenitelja $\bar{X}$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$$

- z-testna veličina, odnosno empirijski z-omjer (z -test)

- SLIKA 7.1. Bahovec i Erjavec (2015) Statistika; str. 290

- Ako je jednostavni slučajni uzorak, veličine $n \leq 30$, izabran iz normalno distribuirane populacije s nepoznatom varijancom, standardizirana vrijednost procjenitelja $\bar{X}$ je
- *t*-testna veličina, odnosno empirijski *t*-omjer
- *t*-test

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}}$$

Izbor testne veličine

- Ovisi o obliku sampling-distribucije standardiziranog procjenitelja $\bar{X}$
- Sampling-distribucija standardiziranog procjenitelja $\bar{X}$ ovisi o:
  - obliku distribucije populacije,
  - veličini uzorka *n* i
  - tome je li varijanca populacije σ^2 poznata ili nepoznata.
- Tablica 7.3. Bahovec i Erjavec (2015) Statistika; str. 292

Primjer 7.2. Dvosmjerni test hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti sredine normalno distribuirane populacije s nepoznatom varijancom, mali uzorak

- Bahovec i Erjavec (2015) Statistika; str. 293

Empirijska razina značajnosti (*p*-vrijednost)

- Pod pretpostavkom da je nulta hipoteza istinita, tj. uz uvjet da je $\mu = \mu_0$, empirijska razina značajnosti (*p* -vrijednost) dvosmjernog z-testa je

$$\begin{aligned} p\text{-vrijednost} &= P(Z < -z \mid \mu = \mu_0 \ \text{ ili } \ Z > z \mid \mu = \mu_0) \\ &= P(Z < -z \mid \mu = \mu_0) + P(Z > z \mid \mu = \mu_0) \\ &= 2P(Z > |z| \mid \mu = \mu_0). \end{aligned}$$

- p-vrijednost dvosmjernog z-testa definira se kao dvostruka vjerojatnost da slučajna varijabla Z, koja ima jediničnu normalnu distribuciju, poprimi vrijednost veću od apsolutne vrijednosti z-omjera
- *p*-vrijednost dvosmjernog *t*-testa je

$$\begin{aligned} p\text{-vrijednost} &= P(t < -t \mid \mu = \mu_0 \ \text{ ili } \ t > t \mid \mu = \mu_0) \\ &= P(t < -t \mid \mu = \mu_0) + P(t > t \mid \mu = \mu_0) \\ &= 2P(t > |t| \mid \mu = \mu_0). \end{aligned}$$

Empirijska razina značajnosti (*p*-vrijednost)

- p-vrijednost $< \alpha$ $\rightarrow H_1$
- p-vrijednost $> \alpha$ $\rightarrow H_0$

Određivanje p-vrijednosti dvosmjernog z-testa

- Bahovec i Erjavec (2015) Statistika; str. 295

Jednosmjerni testovi

- Jednosmjerni test na gornju granicu

$$H_0 : \mu \leqslant \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0.$$

- Nulta se hipoteza često definira samo za graničnu (konkretnu) vrijednost parametra *μ*

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0.$$

- Jednosmjerni test na donju granicu

$$H_0 : \mu \geqslant \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0.$$

- Za graničnu (konkretnu) vrijednost parametra *μ*

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0.$$

Zaključak o ishodu jednosmjernog testa

- Temelji se na usporedbi:
  - testne veličine i
  - kritičnih vrijednosti pripadajuće sampling-distribucije standardiziranog procjenitelja $\bar{X}$
- Može se provesti
- z -test ili
- *t* -test.

- Slika 7.5 i tablica 7.4
- Bahovec i Erjavec (2015) Statistika; str. 298

Empirijska razina značajnosti (*p*-vrijednost)

- Pod pretpostavkom da je nulta hipoteza istinita, a sampling-distribucija standardiziranog procjenitelja $\bar{X}$ jedinična normalna distribucija, definira se kao:

$$p\text{-vrijednost} = P(Z > z \mid \mu = \mu_0) \quad \text{za jednosmjerni test na gornju granicu}$$

$$p\text{-vrijednost} = P(Z < z \mid \mu = \mu_0) \quad \text{za jednosmjerni test na donju granicu.}$$

- Pod pretpostavkom da je nulta hipoteza istinita, a sampling-distribucija standardiziranog procjenitelja $\bar{X}$ Studentova *t* -distribucija, s *df* = *n* − 1 stupnjeva slobode, definira se kao:

$$p\text{-vrijednost} = P(t > t \mid \mu = \mu_0) \quad \text{za jednosmjerni test na gornju granicu}$$

$$p\text{-vrijednost} = P(t < t \mid \mu = \mu_0) \quad \text{za jednosmjerni test na donju granicu}$$

- Donošenje odluke
  - $p\text{-vrijednost} < \alpha \quad \rightarrow H_1$
  - $p\text{-vrijednost} > \alpha \quad \rightarrow H_0$

Primjer 7.7. Određivanje p-vrijednosti jednosmjernog testa na donju granicu

- Bahovec i Erjavec (2015) Statistika; str. 301

Test hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti proporcije populacije s pomoću velikog uzorka

- Može se testirati hipoteza da je proporcija populacije:
  - jednaka (dvosmjerni test),
  - manja (jednosmjerni test na donju granicu) ili
  - veća od pretpostavljene vrijednosti p_0 (jednosmjerni test na gornju granicu).
- Postupak testiranja provest će se samo za velike uzorke (n > 30). Tada se sampling-distribucija procjenitelja $\hat{p}$ dobro aproksimira normalnom distribucijom
- Ako je jednostavni slučajni uzorak izabran iz beskonačne populacije standardizirana varijabla Z, pridružena slučajnoj varijabli $\hat{p}$

$$E(\hat{p}) = p \qquad \sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

7.4. Test hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti proporcije populacije s pomoću velikog uzorka

- z-testna veličina (empirijski z-omjer) $$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}}; \quad \hat{p} = \frac{m}{n}$$
- Ako se provodi izbor jedinica u uzorak bez ponavljanja iz konačne populacije s frakcijom izbora *f* većom od 0,05 standardna pogreška proporcije se korigira

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n} \cdot \frac{N - n}{N - 1}}$$

- Donošenje odluke o ishodu testa:
- Empirijski *z*-omjer uspoređuje se s kritičnim vrijednostima jedinične normalne distribucije, a pripadajući test naziva se *z*-test

- Tablice 7.8 i 7.9
- Bahovec i Erjavec (2015) Statistika; str. 315-316

Primjer 7.15. Dvosmjerni test hipoteze o pretpostavljenoj vrijednosti proporcije populacije

- Bahovec i Erjavec (2015) Statistika; str. 316